



TITLE:

# 不完全修理・予防取り替え問題における最適予防取り替え年齢の単調性 (不確実・不確定性のもとでの数理的決定理論)

AUTHOR(S):

瀬川, 良之; 大西, 匡光

---

CITATION:

瀬川, 良之 ...[et al]. 不完全修理・予防取り替え問題における最適予防取り替え年齢の単調性 (不確実・不確定性のもとでの数理的決定理論). 数理解析研究所講究録 2000, 1132: 181-189

ISSUE DATE:

2000-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63701>

RIGHT:

## 不完全修理・予防取り替え問題における 最適予防取り替え年齢の単調性

瀬川良之 (Yoshiyuki Segawa)

京都学園大学経営学部

〒621-8555 京都府亀岡市曾我部町

segawa@kyotogakuen.ac.jp

大西匡光 (Masamitsu Ohnishi)

大阪大学大学院経済学研究科

〒560-0043 大阪府豊中市

ohnishi@econ.osaka-u.ac.jp

### Abstract

この論文は不完全修理・予防取り替え問題において、期待時間平均費用規範の下における最適政策を考察するものである。最適性方程式を用いた分析により、有限な最適予防取り替え年齢が存在する為の必要十分条件が求められる。また、その必要十分条件の下で有限な最適予防取り替え年齢は唯一であり、費用構造に対して単調な性質を示すことが明らかにされる。

## 1 はじめに

この論文は、不完全修理と予防取り替えのいずれかが許されるような保全システムの最適化を考察するものである。Barlow and Hunter (1960) は、初めて小修理、故障取り替えおよび予防取り替えが許されるようなシステムの保全モデルを扱った。Brown and Proschan (1983) は、初めて不完全修理と呼ばれる保全行為を扱った。それは、故障したシステムを修理した場合、確率  $p$  で新品と同様の状態として稼働状態に入り（完全修理）、確率  $1-p$  で故障したときと同じ年齢の状態として稼働状態に入る（小修理）ものである。不完全修理にはいろいろな提案があり、それぞれに多くの研究がなされている。本論文は、この中で最も古くから扱われてきた Brown and Proschan の延長線上にある。しかし、このタイプの不完全修理問題についてさえ、十分に一般的な最適化理論は研究尽くされているわけではない。Phelps (1983) は、期待時間平均費用規範における連続年齢状態の信頼性システムに対して合理的な条件の下で、最適政策が  $t$ -政策と呼ばれる単調な構造を持つことを初めて証明した。 $t$ -政策とは、故障したシステムの年齢が  $t$  以下ならば小修理を行い、それを越えていたときには故障取り替えを行うというものである。この有用性を認識し、我々は次のような証明に成功することが出来た。Segawa, Ohnishi and Ibaraki (1992) は、期待時間平均費用規範の下で小修理・故障取り替え問題を、故障率が bath-tub 型でありかつ年齢が無限大になるとき無限大に発散する場合について問題をセミ・マルコフ決定過程として定式化し、Ross (1970) の最適性方程式の理論を用いて、最適な  $t$ -政策が存在することを証明した。さらに、Ohnishi (1998) は、期待時間平均費用規範の下で小修理・故障取り替え・予防取り替え問題をセミ・マルコフ決定過程として定式化し、最適性方程式の理論を用いて、故障率が単調に無限大まで増加するという条件の下で、全ての実行可能な政策の中に最適な  $(t, T)$ -政策が存在することを証明した。 $(t, T)$ -政策とは、故障したシステムの年齢が  $t$  以下ならば小修理を行い、それを越えて  $T$  以下ならば故障取り替えを行い、さらに、稼働しているシステムの年齢が  $T$  に達したならば直ちに予防取り替えを行うものである。こうした最適政策の構造解明を、不完全修理問題にまで拡張するための基礎の一端に貢献することが、本論文の目的である。

この論文で扱う信頼性システムは次のようなものである。  $F(x)$  を素子の故障時間分布,  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  を信頼度関数,  $f(x)$  を  $F(x)$  の確率密度関数,  $\lambda(x) = f(x)/\bar{F}(x)$  を故障率関数とする。  $\bar{F}(x)$  は常に正で, この素子の故障時間分布は IFR (Increasing Failure Rate) に従う, すなわち  $\lambda(x)$  は  $x$  に関して厳密に単調増加とし  $\lambda(\infty) = \infty$  を満たすとする。 重要でない数学的な複雑化を避けるために,  $\lambda(x)$  は正の値を取り連続で常に微分可能であるとする。 信頼度関数  $\bar{F}(x)$  をもつ素子が年齢  $x$  で故障して小修理が行われた場合, 年齢  $x$  から稼働状態に入った素子が初めて故障する年齢を  $s$  とすると, 故障時間分布の密度関数  $f(s)/\bar{F}(x) (s \geq x)$  および信頼度関数  $\bar{F}(s|x) = \bar{F}(s)/\bar{F}(x) (s \geq x)$  を持つとする。 修理に要する時間は無視できるものとし, 故障修理, 小修理および予防取り替えに要するコストをそれぞれ  $c_f, c_m$  および  $c_p$  とする。 確率  $p$  を伴う不完全修理の費用を  $c_i(p)$  で表し,  $c_i(0) = c_m, c_i(1) = c_f$  を満たす  $p$  に関して単調に増加する関数とする。

以上の仮定の下で有限な最適予防取り替え年齢が存在する必要十分条件を示し, その必要十分条件が満たされている状況の下で最適予防取り替え年齢が保全費用に対して単調な性質を持つことを示す。

## 2 最適性方程式と最適政策

解析を行うに当たって, Ross (1970) が導出した連続状態空間における最適性方程式の定理を, 本モデルに合わせて定式化した重要な役割を担う定理を以下に記述する。

**定理 1 (最適性方程式 (Ross))** もしある定数  $g$  と相対値関数と呼ばれるある有界な関数  $v$  が存在して, 最適性方程式と呼ばれる以下の方程式を満たすならば, この方程式から導かれる政策は最適政策となる。

$$v(x) = \inf_{T>0} \left\{ c_i(p) + \frac{1-p}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^T v(s)f(s)ds (c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T) - g \int_x^T \bar{F}(s)ds \right\} \right. \\ \left. + p \left\{ \int_0^T v(s)f(s)ds + (c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T) - g \int_0^T \bar{F}(s)ds \right\} \right\}. \quad \square \quad (2.1)$$

現実のモデルにおいては  $x$  は  $T$  を越えることはないので,  $x \leq T$  なる領域でしか相対値関数を観測することとは出来ない。 すなわち,  $T < x$  なる領域において  $v(x)$  は実在しない。 しかし, 定理 1 はこの方程式を満たす  $g, v, T$  が一組でも存在するならば, その予防取り替え年齢  $T$  は期待時間平均費用  $g$  を最小化することを示している。 本論文の証明は, このような  $g, v, T$  を現実に一組構成することによってなされる。 実際, 証明において  $v(x)$  は  $(x, T) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$  なる領域で問題なく定義され, 解析的な困難を引き起こすことはない。 また, 後の証明で明らかになるが, 最適予防取り替え年齢はもちろん  $x$  には依存せず唯一である。

定理 1 の方程式に現れる関数  $v$  は定数項の自由度があり, 一つの制約式を導入することによって簡略化される。

**定理 2 (簡略化された最適性方程式 (Ross))** もし, ある定数  $g$  とある有界な関数  $v$  が存在して, 簡略化された最適性方程式と呼ばれる以下の方程式を満たすならばこの方程式から導かれる政策は最適政策となる。

$$v(x) = \inf_{T>0} \left\{ c_i(p) + \frac{1-p}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^T v(s)f(s)ds + (c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T) - g \int_x^T \bar{F}(s)ds \right\} \right\} \quad (2.2)$$

および

$$\int_0^T v(s)f(s)ds + (c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T) - g \int_0^T \bar{F}(s)ds = 0. \quad \square \quad (2.3)$$

補題 1  $p = 1$  ならば,

$$c_f > c_p \quad (2.4)$$

が有限な最適予防取り替え年齢が存在する必要十分条件である。□

証明略。

以下の議論では,  $0 \leq p < 1$  と仮定する。最初に  $T$  を固定して次の積分方程式

$$v(x) = c_i(p) + \frac{1-p}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^T v(s)f(s)ds + (c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T) - g \int_x^T \bar{F}(s)ds \right\} \quad (2.5)$$

を考える。これは、初期条件

$$\begin{aligned} v(0) &= c_i(p) + (1-p) \left\{ \int_0^T v(s)f(s)ds + (c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T) - g \int_0^T \bar{F}(s)ds \right\} \\ &= c_i(p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

と、終端条件

$$\begin{aligned} v(T) &= c_i(p) + \frac{1-p}{\bar{F}(T)} \{(c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T)\} \\ &= c_i(p) + (1-p)c_p \end{aligned} \quad (2.7)$$

をもつ。これらをまとめて積分方程式のシステムを積分方程式 V と定義する。

定義 1 (積分方程式 V)  $0 \leq p < 1$  に対して、積分方程式 V を

$$v(x) = c_i(p) + \frac{1-p}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^T v(s)f(s)ds + (c_p + v(0) - c_i(p))\bar{F}(T) - g \int_x^T \bar{F}(s)ds \right\} \quad (2.8)$$

ただし,

$$v(0) = c_i(p), \quad (2.9)$$

$$v(T) = c_i(p) + (1-p)c_p \quad (2.10)$$

を満たすものとする。□

補題 2 積分方程式 V は  $0 < p < 1$  に対して,

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{c_i(p)}{p} - \frac{1-p}{p} c_i(p) \bar{F}^{-p}(x) \\ &\quad + \frac{(1-p)\{c_i(p) - (c_i(p) - pc_p)\bar{F}^p(T)\}}{p \int_0^T \bar{F}^p(s)ds} \bar{F}^{-p}(x) \int_0^x \bar{F}^p(s)ds, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$p = 0$  に対して,

$$v(x) = c_m - c_m \int_0^x \lambda(s)ds + \frac{1}{T} \left\{ c_p + c_m \int_0^T \lambda(s)ds \right\} x \quad (2.12)$$

なる陽な解を持つ。□

証明. まず,  $0 < p < 1$  の場合を考える。積分方程式が連続で微分可能な解  $v$  を持つとしよう。このとき, 方程式の両辺に  $\bar{F}(x)$  を掛けて  $x$  について微分して整理すると, 微分方程式

$$v'(x) - p\lambda(x)v(x) + c_i(p)\lambda(x) - (1-p)g = 0 \quad (2.13)$$

を得る。これは積分定数を  $C$  として一般解

$$v(x) = \left[ C - \int_0^x \{c_i(p)\lambda(s) - (1-p)g\} \exp\left(-p \int_0^s \lambda(u)du\right) ds \right] \exp\left(p \int_0^x \lambda(s)ds\right) \quad (2.14)$$

を持ち、信頼度関数の定義  $\bar{F}(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(s)ds\right)$  および

$$\int_0^x \lambda(s) \bar{F}^p(s) ds = \left[ -\frac{\bar{F}^p(s)}{p} \right]_0^x = \frac{1}{p}(1 - \bar{F}^p(x))$$

を代入すると

$$v(x) = \left[ C - \frac{c_i(p)}{p}(1 - \bar{F}^p(x)) + (1-p)g \int_0^x \bar{F}^p(s) ds \right] \bar{F}^{-p}(x) \quad (2.15)$$

を得る。<sup>1</sup>

初期条件を代入すると

$$v(0) = C = c_i(p) \quad (2.16)$$

であり、さらに終端条件を代入すると

$$\begin{aligned} v(T) &= \frac{c_i(p)}{p} - \frac{1-p}{p} c_i(p) \bar{F}^{-p}(T) + (1-p)g \bar{F}^{-p}(T) \int_0^T \bar{F}^p(s) ds \\ &= c_i(p) + (1-p)c_p \end{aligned} \quad (2.17)$$

である。したがって、

$$(c_i(p) - pc_p) \bar{F}^p(T) - c_i(p) + pg \int_0^T \bar{F}^p(s) ds = 0 \quad (2.18)$$

から

$$g = \frac{1}{\int_0^T \bar{F}^p(s) ds} \left\{ c_p \bar{F}^p(T) + \frac{1 - \bar{F}^p(T)}{p} c_i(p) \right\} \quad (2.19)$$

であり、これを (2.15) に代入することによって陽な解 (2.11) が得られる。

$p=0$  の場合は証明を略します。□

次に、最適な予防取り替え年齢が存在し、かつ、それが唯一であることを示そう。任意の  $g, T (g > 0, T > 0)$  および可積分な関数  $v$  に対して簡略化された最適性方程式に関連した作用素  $U$  を定義する。

## 定義 2

$$\begin{aligned} U[g, T, v](x) &\equiv c_i(p) + \frac{1-p}{\bar{F}(x)} \left\{ \int_x^T v(s) f(s) ds \right. \\ &\quad \left. + (c_p + v(0) - c_i(p)) \bar{F}(T) - g \int_x^T \bar{F}(s) ds \right\}. \square \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここで最適な期待時間平均費用、予防取り替え年齢および相対値関数をそれぞれ  $g^*, T^*, v^*$  とおくと、 $U[g, T, v](x)$  の微分可能性から  $T^*$  はその停留点であることが必要である。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial T} U[g^*, T^*, v^*](x) = 0 \quad \forall x \in [0, \infty) \quad (2.21)$$

であることが必要である。ここで

$$\frac{\partial}{\partial T} U[g, T, v](x) = (1-p) \frac{\bar{F}(T)}{\bar{F}(x)} \{v(T)\lambda(T) - (c_p + v(0) - c_i(p))\lambda(T) - g\} \quad (2.22)$$

<sup>1</sup>  $v'(x) + a(x)v(x) + b(x) = 0$  の一般解は積分定数を  $C$  として  $v(x) = \left[ C - \int_0^x b(s) e^{\int_0^s a(u)du} ds \right] e^{-\int_0^x a(s)ds}$  である。

であることから初期条件と終端条件を代入して

$$= (1-p) \frac{\bar{F}(T)}{\bar{F}(x)} \{(c_i(p) - pc_p)\lambda(T) - g\} \quad (2.23)$$

を得る.

まず,  $c_i(p) - pc_p \leq 0$  の場合は予防保全を全く行わないことが最適となることを証明しよう.

**補題 3**  $c_i(p) - pc_p \leq 0$  の場合いかなる年齢においても予防取り替えを行わないことが最適である.  $\square$

**証明.**

$(c_i(p) - pc_p)\lambda(T) - g \leq 0$  であることから

$$\frac{\partial}{\partial T} U[g, T, v](T) \leq 0 \quad (2.24)$$

となり,  $U[g, T, v]$  は  $T$  に関して非増加, かつ,  $T = \infty$  にて最小値を達成する. 最適な期待時間平均費用は

$$g^* = \frac{c_i(p)}{p \int_0^\infty \bar{F}^p(s) ds} > 0 \quad (2.25)$$

与えられる. よって,  $T = \infty$  のとき最適性方程式を満たす  $T = \infty$  に対応する  $g^*, v^*$  が存在することから, 予防取り替えを行わないことが最適となる. また, 条件より常に  $p > 0$  が成立している.  $\square$

次に,  $c_i(p) - pc_p > 0$  の場合を考える.

**補題 4**  $p = 0$  に対して,  $c_i(p) - pc_p > 0$  の場合,

$$\begin{aligned} g_1(T) &= \frac{1}{T} \left\{ c_p + c_m \int_0^T \lambda(s) ds \right\}, \\ g_2(T) &= c_m \lambda(T) \end{aligned} \quad (2.26)$$

および

$$Z(T) = T \{g_2(T) - g_1(T)\} \quad (2.27)$$

とおくと, 常に唯一の有限な最適予防取り替え年齢  $T^*$  が存在して,  $T^*$  は  $Z(T) = 0$  の解である.  $\square$

**証明略.**

**補題 5**  $0 < p < 1$  に対して,  $c_i(p) - pc_p > 0$  の場合,

$$g_1(T) = \frac{1}{p \int_0^T \bar{F}^p(s) ds} \{c_i(p) - (c_i(p) - pc_p) \bar{F}^p(T)\}, \quad (2.28)$$

$$g_2(T) = (c_i(p) - pc_p) \lambda(T) \quad (2.29)$$

および

$$Z(T) = \left( p \int_0^T \bar{F}^p(s) ds \right) \{g_2(T) - g_1(T)\} \quad (2.30)$$

とおくと, 常に唯一の有限な最適予防取り替え年齢  $T^*$  が存在して,  $T^*$  は  $Z(T) = 0$  の解である.  $\square$

証明.

このとき

$$Z(T) = (c_i(p) - pc_p) \left\{ p\lambda(T) \int_0^T \bar{F}^p(s) ds + \bar{F}^p(T) \right\} - c_i(p) \quad (2.31)$$

であるから、これを  $T$  で微分すると

$$Z'(T) = (c_i(p) - pc_p) p\lambda'(T) \int_0^T \bar{F}^p(s) ds > 0 \quad (0 < T < \infty) \quad (2.32)$$

を得る. すなわち、 $Z(T)$  は  $T$  について単調増加である. また、

$$Z(0) = -c_p < 0 \quad (2.33)$$

および

$$Z(\infty) = (c_i(p) - pc_p) p\lambda(\infty) \int_0^\infty \bar{F}^p(s) ds - c_i(p) = \infty \quad (2.34)$$

から、 $Z(T) = 0$  を満たす唯一の有限な解  $T^*$  が存在する. ここで、

$$g^* = g_1(T^*) = g_2(T^*) \quad (2.35)$$

および

$$v^*(x) = \frac{c_i(p)}{p} - \frac{1-p}{p} c_i(p) \bar{F}^{-p}(x) + (1-p) g^* \bar{F}^{-p}(x) \int_0^x \bar{F}^p(s) ds \quad (2.36)$$

とおくと

$$\frac{\partial}{\partial T} U[g^*, T, v^*](x) = (1-p) \frac{\bar{F}(T)}{\bar{F}(x)} \{ (c_i(p) - pc_p) \lambda(T) - g^* \} \quad (2.37)$$

である.  $\lambda(T)$  の単調増加性より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} U[g^*, T, v^*](x) &< 0 \quad (T < T^*), \\ \frac{\partial}{\partial T} U[g^*, T, v^*](x) &= 0 \quad (T = T^*), \\ \frac{\partial}{\partial T} U[g^*, T, v^*](x) &> 0 \quad (T > T^*) \end{aligned} \quad (2.38)$$

が成り立つことから、 $U[g^*, T, v^*](x)$  は  $T = T^*$  においてその最小値を達成し、 $g^*, T^*, v^*$  は最適性方程式を満たす. よって、故障した素子の年齢  $x$  が  $x < T^*$  のときには不完全修理を行い、素子の年齢が  $T^*$  に達したならば直ちに予防取り替えを行うことが最適である. □

補題 3, 4, 5 により、 $c_i(p) - pc_p > 0$  が有限な最適予防取り替え年齢が存在する必要十分条件と結論できる.

**定理 3** 不完全修理・予防取り替え問題に、有限な最適予防取り替え年齢が存在する必要十分条件は

$$c_i(p) - pc_p > 0 \quad (2.39)$$

である. □

### 3 保全費用と最適予防取り替え年齢の関係

以下では、有限な予防取り替え年齢が存在するための必要十分条件

$$c_i(p) - pc_p > 0 \quad (3.1)$$

が常に成立しているものとする.

最初に,  $0 < p < 1$  の場合を考える.

$Z(T)$  を費用に焦点を当てて記述すると

$$Z(T) = c_i(p) \left\{ p\lambda(T) \int_0^T \bar{F}^p(s) ds + \bar{F}^p(T) - 1 \right\} - pc_p \left\{ p\lambda(T) \int_0^T \bar{F}^p(s) ds + \bar{F}^p(T) \right\} \quad (3.2)$$

と表される. そこで, 一時的に

$$y(T) \equiv p\lambda(T) \int_0^T \bar{F}^p(s) ds + \bar{F}^p(T) - 1 \quad (3.3)$$

とおくと,

$$y(0) = 0 \quad (3.4)$$

および

$$y'(T) = p\lambda'(T) \int_0^T \bar{F}^p(s) ds > 0 \quad (T > 0) \quad (3.5)$$

であるから,  $y(T)$  は単調増加であり  $y(T) > 0$  ( $T > 0$ ) が成り立つ. また,  $Z(T)$  は  $y(T)$  を用いて

$$Z(T) = c_i(p)y(T) - pc_p(y(T) + 1) \quad (3.6)$$

と表される. ここで,  $y(T)$  の値は費用  $c_i(p)$  にも  $c_p$  にも依存しない. この式から分かるとおり,  $Z(T)$  は  $0 < T < \infty$  において  $c_i(p)$  に対して単調増加であり,  $c_p$  に対して単調減少である. 最適予防取り替え年齢  $T^*$  は  $Z(T) = 0$  の解であるから,  $T^*$  は  $c_i(p)$  に対して単調減少であり,  $c_p$  に対して単調増加である.

$p = 0, 1$  の場合は, 最適性の証明の仕方が  $0 < p < 1$  の場合とは幾分異なるため分けて考察する必要がある.

$p = 0$  の場合,  $c_i(p) - pc_p > 0$  は常に成立しており,

$$Z(T) = c_m \int_0^T \{\lambda(T) - \lambda(s)\} ds - c_p \quad (3.7)$$

について考察すると,  $Z(T)$  は  $c_m$  に対して単調増加であり,  $c_p$  に対して単調減少である. 最適予防取り替え年齢  $T^*$  は  $Z(T) = 0$  の解であるから,  $T^*$  は  $c_m$  に対して単調減少であり,  $c_p$  に対して単調増加である.

$p = 1$  の場合, 同様に示すことが出来る.

以上により, 次の定理を得る.

**定理 4**  $p = 0$  の場合, 費用構造に関わらず有限な最適予防取り替え年齢が存在して, それは小修理費用に対し単調減少であり, 予防取り替え費用に対して単調増加である.

$0 < p < 1$  の場合,  $c_i(p) > pc_p$  である限り最適予防取り替え年齢は有限かつ不完全修理費用に対して単調減少であり, 予防取り替え費用に対して単調増加である.

$p = 1$  の場合,  $c_f > c_p$  である限り有限な最適予防取り替え年齢が存在して, それは故障取り替え費用に対して単調減少であり, 予防取り替え費用に対して単調増加である. □

Remark:

Beichelt (1993) は, 有限な最適予防取り替え年齢が存在するための十分条件として

$$c_f + \frac{1-p}{p} c_m > c_p \quad (3.8)$$



を指摘しているが、これを変形して

$$(1-p)c_m + pc_f - pc_p > 0 \quad (3.9)$$

と表すならば明らかなように、これは我々のモデルの  $0 < p \leq 1$  の場合に不完全修理費用関数が  $c_i(p) = (1-p)c_m + pc_f$  である場合において、有限な最適予防取り替え年齢が存在する必要十分条件と同一である。すなわち、本稿はこれが単なる十分条件ではなく、必要十分条件あることを示している。このような場合、不完全修理費用は  $p$  について線形となる。そこで、こうした場合を費用関数が  $p$  に対して中立という考えかたで定義しよう。

**定義 3** 不完全費用  $c_i(p)$  が確率  $p$  に対して中立であるというのは、 $c_i(p)$  が  $p$  に対して線形に表現できることである。すなわち、本論文下では次の様に表され、しばしば多くの論文に現れるのはこのタイプに限る。

$$c_i(p) \equiv (1-p)c_m + pc_f \quad \square. \quad (3.10)$$

最後に、中立でない不完全費用関数を持つ場合、最適なシステムはどのような性質を持つの2つの場合、不完全修理費用関数が凸な場合と凹な場合の一つ性質を例示にふれてみよう。

**凸な場合：**

**補題 6**  $c_i(p) = c_m + p^2(c_f - c_m)$  が、 $c_m < c_p < c_f$  および  $c_p^2 - 4c_m(c_f - c_m) > 0$  を満たすならば、予防取り替え年齢が有限であるための必要十分条件は次のようになる。

$$c_i(p) - pc_p = p^2(c_f - c_m) - pc_p + c_m > 0 \quad (3.11)$$

*i.e.*

$$0 \leq p < \frac{c_p - \sqrt{c_p^2 - 4c_m(c_f - c_m)}}{2(c_f - c_m)}, \frac{c_p + \sqrt{c_p^2 - 4c_m(c_f - c_m)}}{2(c_f - c_m)} < p \leq 1 \quad \square. \quad (3.12)$$

**凹な場合：**

**補題 7**  $c_i(p) = c_f - (1-p)^2(c_f - c_m)$  が  $c_m < c_f < c_p$  を満たすならば、予防取り替え年齢が有限であるための必要十分条件は次のようになる。

$$c_i(p) - pc_p = -p^2(c_f - c_m) + p\{2(c_f - c_m) - c_p\} + c_m > 0 \quad (3.13)$$

*i.e.*

$$0 \leq p < \frac{2(c_f - c_m) - c_p + \sqrt{\{2(c_f - c_m) - c_p\}^2 + 4c_m(c_f - c_m)}}{2(c_f - c_m)} \quad \square. \quad (3.14)$$

## 4 おわりに

本論文では、不完全修理と予防取り替えが許されるシステムを扱い、最適予防取り替え年齢が有限であるための必要十分条件を示した。さらに、最適予防取り替え年齢が有限な場合について、最適予防取り替え年齢は唯一であり、かつ、不完全修理費用、小修理費用、故障取り替え費用および予防取り替え費用に対して単調に変化することを見いだした。

不完全修理費用の構造と最適予防取り替え年齢の関係、および、故障したときに複数個の不完全修理(e.g.  $c_i(p_1), c_i(p_2), \dots$ ) が可能であるならば、最適政策がどのようなものになるか大変興味深いところである。以後、この様なモデルを解析してゆくこととしたい。

## 参考文献

- [1] Barlow, R. E. and Hunter, L. C., "Optimal preventive maintenance policies", *Operations Research*, Vol.8, pp.90-100, (1960).
- [2] Beichelt, F., "A Unifying Treatment of Replacement Policies with Minimal Repair", *Naval Research Logistics*, Vol.40, pp.51-67, (1993).
- [3] Block, H. W., Borges, W. S. and Savitis, T. H. "Age-Dependent Minimal Repair", *Journal of Applied Probability*, Vol.22, pp.370-385, (1985).
- [4] Brown, M. and Proschan, F., "Imperfect Repair", *Journal of Applied Probability*, Vol.20, pp.851-859, (1983).
- [5] Phelps, R. I., "Optimal Policy for Minimal Repair", *Journal of the Operations Research Society*, Vol.34, pp.425-427, (1983).
- [6] Last, G. and Szekll, R., "Stochastic Comparison of Repairable Systems by Coupling", *Journal of Applied Probability*, Vol.35, pp.348-370, (1998).
- [7] Ohnishi, M., "Optimal Minimal-Repair and Replacement Problem under Average Cost Criterion: Optimality of  $(t, T)$ -Policy", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.40, pp.373-389, (1997).
- [8] Ross, S. M., "Average Cost Semi-Markov Decision Processes", *Journal of Applied Probability*, Vol.7, pp.649-656, (1970).
- [9] Segawa, Y., Ohnishi, M. and Ibaraki, T., "Optimal Minimal-Repair and Replacement Problem with Age Dependent Cost Structure", *Computers Math. Applic.*, Vol.24, No.1/2, pp.91-101, (1992).